

1.5 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ταυτότητα : Λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της.

2.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες : Είναι ταυτότητες που χρησιμοποιούμε πολύ συχνά και γι' αυτό το λόγο πρέπει να τις μάθουμε πολύ καλά .

3.

Τετράγωνο αθροίσματος – διαφοράς : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

4.

Κύβος αθροίσματος – διαφοράς : $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
 $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

5.

Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά : $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

6.

Άθροισμα κύβων – διαφορά κύβων : $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$
 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Ανάποδα οι ταυτότητες : Τις ταυτότητες που αναφέραμε παραπάνω θα πρέπει να μάθουμε να τις χρησιμοποιούμε πηγαίνοντας και από το δεύτερο μέλος προς το πρώτο .

2.

Τετράγωνο τριωνύμου : $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$
 Παραλλαγές της παραπάνω ταυτότητας
 $(\alpha - \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma$
 $(\alpha - \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$
 Παρατηρήστε ότι στα διπλάσια γινόμενο υπολογίζουμε το πρόσημο των α, β, γ

3.

Δύο ακόμα ταυτότητες : $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

4.

Μέθοδος : Για την απόδειξη μιας ταυτότητας συνήθως ξεκινάμε από το ένα μέλος το επεξεργαζόμαστε και προσπαθούμε να φτάσουμε στο άλλο μέλος . Κάποιες φορές επεξεργαζόμαστε και τα δύο μέλη έως ότου φτάσουμε σε κάτι που ισχύει ή επεξεργαζόμαστε κάθε μέλος ξεχωριστά προσδοκώντας να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα .

5.

Σύσταση : Τις ταυτότητες θα πρέπει να μάθετε να τις διατυπώνετε και με λόγια πχ το $(\alpha + \beta)^2 =$ με το τετράγωνο του πρώτου όρου συν το διπλάσιο γινόμενο των δύο όρων συν το τετράγωνο του δεύτερου όρου
 Για τις υπόλοιπες ταυτότητες γράψτε στο τετράδιό σας εσείς τους δικούς σας κανόνες
 Όταν θέλετε να υπολογίσετε μια παράσταση με τη χρήση κάποιας ταυτότητας λέτε τον σχετικό κανόνα και γράφετε

6.

Ταυτότητες υπό συνθήκη : Είναι ταυτότητες που ισχύουν με ορισμένες προϋποθέσεις .
 Για να αποδείξουμε μια τέτοια ταυτότητα προσπαθούμε να αξιοποιήσουμε την υπόθεση του προβλήματος κατάλληλα έτσι ώστε σε συνδυασμό με άλλες γνώσεις που έχουμε να φτάσουμε στο ζητούμενο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

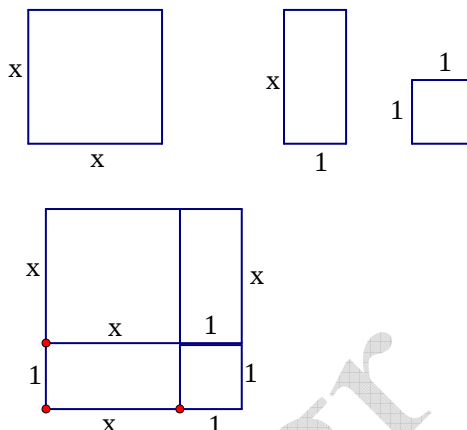
1.

Πόσα από τα διπλανά σχήματα χρειάζονται για να φτιάξουμε τετράγωνο πλευράς $x + 1$;

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Είναι } (x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot (x \cdot 1) + 1^2$$

Χρειάζονται ένα τετράγωνο πλευρά x ,
δύο ορθογώνια διαστάσεων x και 1 ,
ένα τετράγωνο πλευράς 1 όπως βλέπουμε
και στο διπλανό σχήμα.



2.

Να υπολογίσετε χωρίς μολύβι και χαρτί τις παραστάσεις

$$15^2 - 5^2 \quad \text{και} \quad 12^2 - 8^2$$

$$105^2 - 95^2 \quad \text{και} \quad 102^2 - 98^2$$

$$1005^2 - 995^2 \quad \text{και} \quad 1002^2 - 998^2$$

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Φανταζόμαστε ότι } 15^2 - 5^2 = (15 - 5)(15 + 5) = 10 \cdot 20 = 200$$

$$12^2 - 8^2 = (12 - 8)(12 + 8) = 4 \cdot 20 = 80$$

$$105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2000$$

$$102^2 - 98^2 = (102 - 98)(102 + 98) = 4 \cdot 200 = 800$$

$$1005^2 - 995^2 = (1005 - 995)(1005 + 995) = 10 \cdot 2000 = 20000$$

$$1002^2 - 998^2 = (1002 - 998)(1002 + 998) = 4 \cdot 2000 = 8000$$

3.

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες

α) $(x - y)^3 + (x + y)^3 - x^3 + 3x(x + y)(x - y) = 4x^3 + 3xy^2$

β) $(4\alpha^2 + 9\beta^4)^2 - (4\alpha^2 - 9\beta^4)^2 + 5(12\alpha\beta^2 - 5) + 29 - 12\alpha\beta^2 = (12\alpha\beta^2 + 2)^2$

γ) $\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)(\alpha + 3\beta) + \beta^4 = (\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2)^2$

δ) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)^2$

ε) $(\alpha^2 + 4)(x^2 + 1) - (\alpha x + 2)^2 = (2x - \alpha)^2$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned}
 & (x-y)^3 + (x+y)^3 - x^3 + 3x(x+y)(x-y) = \\
 & = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - x^3 + (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + 3x(x^2 - y^2) = \\
 & = \textcolor{red}{x}^3 - \textcolor{green}{3x}^2y + \textcolor{blue}{3xy}^2 - y^3 - \textcolor{red}{x}^3 + \textcolor{red}{x}^3 + \textcolor{green}{3x}^2y + \textcolor{blue}{3xy}^2 + y^3 + \textcolor{red}{3x}^3 - \textcolor{blue}{3xy}^2 = \\
 & = 4x^3 - 3xy^2
 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}
 & (4\alpha^2 + 9\beta^4)^2 - (4\alpha^2 - 9\beta^4)^2 + 5(12\alpha\beta^2 - 5) + 29 - 12\alpha\beta^2 = \\
 & = (16\alpha^4 + 72\alpha^2\beta^4 + 81\beta^8) - (16\alpha^4 - 72\alpha^2\beta^4 + 81\beta^8) + 60\alpha\beta^2 - 25 + 29 - 12\alpha\beta^2 = \\
 & = \textcolor{red}{16}\alpha^4 + \textcolor{green}{72}\alpha^2\beta^4 + \textcolor{blue}{81}\beta^8 - \textcolor{red}{16}\alpha^4 + \textcolor{green}{72}\alpha^2\beta^4 - \textcolor{blue}{81}\beta^8 + \textcolor{magenta}{60}\alpha\beta^2 - 25 + 29 - \textcolor{magenta}{12}\alpha\beta^2 = \\
 & = 144\alpha^2\beta^4 + 48\alpha\beta^2 + 4 = (12\alpha\beta^2 + 2)^2
 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned}
 & \alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)(\alpha + 3\beta) + \beta^4 = (\alpha^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\alpha\beta + 6\beta^2) + \beta^4 = \\
 & = (\alpha^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + 5\alpha\beta + 6\beta^2) + \beta^4 = \\
 & = \alpha^4 + 5\alpha^2\beta + 6\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta + 5\alpha^2\beta^2 + 6\alpha\beta^3 + \beta^4 = \\
 & = \alpha^4 + 6\alpha^2\beta + 11\alpha^2\beta^2 + 6\alpha\beta^3 + \beta^4 \quad (1) \\
 & (\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2)^2 = \alpha^4 + 9\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 6\alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta^2 + 6\alpha\beta^3 = \\
 & = \alpha^4 + 6\alpha^2\beta + 11\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 6\alpha\beta^3 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Σχόλιο 2

Αφού τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι, ίσα θα είναι και τα πρώτα

δ)

$$\begin{aligned}
 & (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 \quad (1) \\
 & (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 = \\
 & = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Αφού τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα

ε)

$$\begin{aligned}
 & (\alpha^2 + 4)(x^2 + 1) - (\alpha x + 2)^2 = \alpha^2 x^2 + \alpha^2 + 4x^2 + x^2 - (\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 4) = \\
 & = \textcolor{red}{\alpha}^2 \textcolor{red}{x}^2 + \textcolor{blue}{\alpha}^2 + \textcolor{green}{4x}^2 + \textcolor{magenta}{4} - \textcolor{red}{\alpha}^2 \textcolor{red}{x}^2 - 4\alpha x - \textcolor{magenta}{4} = \\
 & = \alpha^2 - 4\alpha x + 4x^2 = (2x - \alpha)^2
 \end{aligned}$$

4.

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες

$$\alpha) (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 4\beta^2$$

$$\beta) (\alpha + \beta)^3 = \alpha(\alpha - 3\beta)^2 + \beta(\beta - 3\alpha)^2$$

$$\gamma) (x^3 + y^3)^2 - (x^2 + y^2)^3 + 3x^2y^2(x + y)^2 = (2xy)^3$$

$$\delta) (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^8 - \beta^8$$

$$\epsilon) (\alpha - \beta)(-\alpha - \beta)(-\alpha^2 - \beta^2) = \alpha^4 - \beta^4$$

$$\sigma\tau) (\alpha\beta + 1)(\alpha^2\beta^2 + 1)(\alpha\beta - 1) + 1 - \alpha^4\beta^4 = 0$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - 2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \\ &= 4\beta^2 \end{aligned}$$

β)

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 3\beta)^2 + \beta(\beta - 3\alpha)^2 &= \alpha(\alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2) + \beta(\beta^2 - 6\alpha\beta + 9\alpha^2) = \\ &= \alpha^3 - 6\alpha^2\beta + 9\alpha\beta^2 + \beta^3 - 6\alpha\beta^2 + 9\beta\alpha^2 = \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \quad (2) \end{aligned}$$

Αφού τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα

γ)

$$\begin{aligned} (x^3 + y^3)^2 - (x^2 + y^2)^3 + 3x^2y^2(x + y)^2 &= \\ = x^6 + 2x^3y^3 + y^6 - (x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6) + 3x^2y^2(x^2 + 2xy + y^2) &= \\ = x^6 + 2x^3y^3 + y^6 - x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 - y^6 + 3x^4y^2 + 6x^3y^3 + 3x^2y^4 &= \\ = 8x^3y^3 = (2xy)^3 \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) &= (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) = \\ &= (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^4 - \beta^4) = \alpha^8 - \beta^8 \end{aligned}$$

Θεωρία 5

ε)

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(-\alpha - \beta)(-\alpha^2 - \beta^2) &= (\alpha - \beta)[-(\alpha + \beta)][-(\alpha^2 + \beta^2)] \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^4 - \beta^4 \end{aligned}$$

στ)

$$\begin{aligned} (\alpha\beta + 1)(\alpha^2\beta^2 + 1)(\alpha\beta - 1) + 1 - \alpha^4\beta^4 &= (\alpha^2\beta^2 - 1)(\alpha^2\beta^2 + 1) + 1 - \alpha^4\beta^4 \\ &= \alpha^4\beta^4 - 1 + 1 - \alpha^4\beta^4 = 0 \end{aligned}$$

5.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) (x+3)^2 - (x+4)(x-4) - 3(4x+1)$$

$$\beta) (3x+2)^2 - (4x-1)^2 - (3x+7)(3x-7)$$

$$\gamma) 3(x+2y)^2 - 2(x-3y)^2 - (3x+4y)(3x-4y)$$

$$\delta) (x-1)(x^2+1)(x+1)(x^4+1) - x^8$$

$$\epsilon) (3x^4-5x^2)^2 - (x^3+2x)^2 + (x+1)^2 - (x^4+3x^2)(x^4-3x^2)$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - (x+4)(x-4) - 3(4x+1) &= (x^2+6x+9) - (x^2-16) - 12x - 3 = \\ &= x^2+6x+9 - x^2+16 - 12x - 3 = \\ &= -6x+22 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} (3x+2)^2 - (4x-1)^2 - (3x+7)(3x-7) &= (9x^2+12x+4) - (16x^2-8x+1) - (9x^2-49) = \\ &= 9x^2+12x+4 - 16x^2+8x-1 - 9x^2+49 = \\ &= -16x^2+20x+52 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} 3(x+2y)^2 - 2(x-3y)^2 - (3x+4y)(3x-4y) &= \\ = 3(x^2+4xy+4y^2) - 2(x^2-6xy+9y^2) - (9x^2-16y^2) &= \\ = 3x^2+12xy+12y^2 - 2x^2+12xy - 18y^2 - 9x^2+16y^2 &= \\ = -8x^2+24xy+10y^2 \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2+1)(x+1)(x^4+1) - x^8 &= (x^2+1) [(x-1)(x+1)] (x^4+1) - x^8 = \\ &= (x^2+1) (x^2-1)(x^4+1) - x^8 = \\ &= (x^4-1)(x^4+1) - 2x^8 = \\ &= x^8-1-x^8 = -1 \end{aligned}$$

Θεωρία 5

ε)

$$\begin{aligned} (3x^4-5x^2)^2 - (x^3+2x)^2 + (x+1)^2 - (x^4+3x^2)(x^4-3x^2) &= \\ = 9x^8 - 30x^6 + 25x^4 - (x^6+4x^4+4x^2) + (x^2+2x+1) - (x^8-9x^4) &= \\ = 9x^8 - 30x^6 + 25x^4 - x^6 - 4x^4 - 4x^2 + x^2 + 2x + 1 - x^8 + 9x^4 &= \\ = 8x^8 - 31x^6 + 30x^4 - 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

6.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) (x-2y+1)^2 - (x-2y)(x+2y) - 2x(x-3y)$$

$$\beta) (2x+3y)^3 - (3x-y)^3$$

$$\gamma) 3(4x+1)^3 - 2(3x-2)^3$$

$$\delta) (x+y)^3 + 3(x+y)^2(x-y) + 3(x+y)(x-y)^2 + (x-y)^3$$

$$\epsilon) (x^3+2y^2)^2 - (y^2+2x^3)^2 + (x^3-2y^2)(x^3+2y^2)$$

$$\sigma\tau) (x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x+y) - 5x^6 + 2y^6$$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

α)

$$\begin{aligned} (x-2y+1)^2 - (x-2y)(x+2y) - 2x(x-3y) &= \\ &= x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy + 2x - 4y - (x^2 - 4y^2) - 2x^2 + 6xy = \\ &= x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy + 2x - 4y - x^2 + 4y^2 - 2x^2 + 6xy = \\ &= -2x^2 + 8y^2 + 2xy - 4y + 2x + 1 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} (2x+3y)^3 - (3x-y)^3 &= \\ &= 8x^3 + 3(4x^2)3y + 3(2x)(9y^2) + 27y^3 - [27x^3 - 3(9x^2)y + 3(3x)y^2 - y^3] = \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 27x^3 + 27x^2y - 9xy^2 + y^3 = \\ &= -19x^3 + 63x^2y + 45xy^2 + 28y^3 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} 3(4x+1)^3 - 2(3x-2)^3 &= \\ &= 3[64x^3 + 3(16x^2) \cdot 1 + 3(4x) \cdot 1 + 1] - 2[27x^3 - 3(9x^2) \cdot 2 + 3(3x) \cdot 4 - 8] = \\ &= 3[64x^3 + 48x^2 + 12x + 1] - 2[27x^3 - 54x^2 + 36x - 8] = \\ &= 192x^3 + 144x^2 + 36x + 3 - 54x^3 + 108x^2 - 72x + 16 = \\ &= 138x^3 + 252x^2 - 36x + 19 \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} (x+y)^3 + 3(x+y)^2(x-y) + 3(x+y)(x-y)^2 + (x-y)^3 &= [(x+y) + (x-y)]^3 = \\ &= (x+y+x-y)^3 = \\ &= (2x)^3 = 8x^3 \end{aligned}$$

Σχόλιο 1

ε)

$$\begin{aligned} (x^3+2y^2)^2 - (y^2+2x^3)^2 + (x^3-2y^2)(x^3+2y^2) &= \\ &= (x^6 + 4x^3y^2 + 4y^4) - (y^4 + 4y^2x^3 + 4x^6) + (x^6 - 4y^4) = \\ &= x^6 + 4x^3y^2 + 4y^4 - y^4 - 4y^2x^3 - 4x^6 + x^6 - 4y^4 = -2x^6 - y^4 \end{aligned}$$

στ)

Θεωρία 6

$$\begin{aligned}
 & (x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x+y)-5x^6+2y^6 = \\
 & = [(x-y)(x^2+xy+y^2)] [(x+y)(x^2-xy+y^2)] - 5x^6 + 2y^6 = \\
 & = (x^3-y^3)(x^3+y^3) - 5x^6 + 2y^6 = x^6 - y^6 - 5x^6 + 2y^6 = \\
 & = -4x^6 + y^6
 \end{aligned}$$

7.

Στις παρακάτω παραστάσεις να συμπληρωθούν τα κενά ώστε να προκύψουν αναπτύγματα τελείων τετραγώνων

α) $9x^2 + 12x + \dots$

β) $x^2 + \frac{1}{4} + \dots$

γ) $x^2 - xy + \dots$

δ) $x^2 - 5x + \dots$

ε) $25x^2 + 7x + \dots$

στ) $x^2 - 14xy + \dots$

ζ) $\alpha^2 - 5\alpha\beta + \dots$

η) $4x^2 - 12x + \dots$

θ) $9x^2 + 4y^2 + \dots$

Προτεινόμενη λύση

α)

Σχόλιο 1

$$9x^2 + 12x + \dots = (3x)^2 + 2(3x) \cdot 2 + 2^2 = (3x)^2 + 2(3x) \cdot 2 + 4 = (3x + 2)^2$$

β)

$$x^2 + \frac{1}{4} + \dots = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

γ)

$$x^2 - xy + \dots = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} xy + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2$$

δ)

$$x^2 - 5x + \dots = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

ε)

$$\begin{aligned}
 25x^2 + 7x + \dots &= (5x)^2 + 2(5x) \cdot \frac{7}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 = (5x)^2 + 2(5x) \cdot \frac{7}{10} + \frac{49}{100} = \\
 &= \left(5x + \frac{7}{10}\right)^2
 \end{aligned}$$

στ)

$$x^2 - 14xy + \dots = x^2 - 2x(7y) + (7y)^2 = x^2 - 2x(7y) + 49y^2 = (x - 7y)^2$$

ζ)

$$\alpha^2 - 5\alpha\beta + \dots = \alpha^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}\alpha\beta + \left(\frac{5}{2}\beta\right)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}\alpha\beta + \frac{25}{4}\beta^2 = \left(\alpha - \frac{5}{2}\beta\right)^2$$

η)

$$4x^2 - 12x + \dots = (2x)^2 - 2(2x) \cdot 3 + 3^2 = (2x)^2 - 2(2x) \cdot 3 + 9 = (2x - 3)^2$$

θ)

$$9x^2 + 4y^2 + \dots = (3x)^2 + (2y)^2 + 2(3x)(2y) = (3x)^2 + (2y)^2 + 12xy = (3x + 2y)^2$$

8.

Στις παρακάτω ισότητες να συμπληρωθούν τα κενά

$$\alpha) (--- + 5)^2 = 16\alpha^2 + --- + ---$$

$$\beta) (--- - 2\alpha)^2 = 9\beta^2 - \dots + \dots$$

$$\gamma) (--- + \frac{1}{4}x)^2 = \dots + 3xy + \dots$$

$$\delta) \dots - 9\omega^2 = (5 + \dots)(5 - \dots)$$

$$\epsilon) (225 - \dots) = (\dots + 2y^3)(\dots - 2y^3)$$

$$\sigma\tau) 9x^2 + 6xy + \dots = (\dots + \dots)^2$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) (4\alpha + 5)^2 = 16\alpha^2 + 40\alpha + 25$$

$$\beta) (3\beta - 2\alpha)^2 = 9\beta^2 - 12\alpha\beta + 4\alpha^2$$

$$\gamma) \left(6y + \frac{1}{4}x\right)^2 = 36y^2 + 3xy + \frac{1}{16}x^2$$

$$\delta) 25 - 9\omega^2 = (5 + 3\omega)(5 - 3\omega)$$

$$\epsilon) 225 - 4y^6 = (15 + 2y^3)(15 - 2y^3)$$

$$\sigma\tau) 9x^2 + 6xy + y^2 = (3x + y)^2$$

Σχόλιο 1

9.

α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες

$$\text{i)} \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$$

$$\text{ii)} \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

β) Αν $x - \frac{4}{x} = 3$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων

$$\text{i)} x^2 + \frac{16}{x^2}, \quad \text{ii)} x^3 - \frac{64}{x^3}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\text{i)} (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{ii)} (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 - \beta^3$$

β)

$$\text{i)} x^2 + \frac{16}{x^2} = x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 \stackrel{(\alpha \text{ i})}{=} \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{4}{x} = 3^2 + 8 = 9 + 8 = 17$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} x^3 - \frac{64}{x^3} &= x^3 - \left(\frac{4}{x}\right)^3 \stackrel{(\alpha \text{ ii})}{=} \left(x - \frac{4}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{4}{x} \left(x - \frac{4}{x}\right) = \\ &= 3^3 + 12 \cdot 3 = \\ &= 27 + 36 = 63 \end{aligned}$$

10.

Αν $x = \alpha^2 - \beta^2$, $y = 2\alpha\beta$, $\omega = \alpha^2 + \beta^2$, δείξτε ότι $x^2 + y^2 = \omega^2$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 6

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 = \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \omega^2 \end{aligned}$$

11.

Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, δείξτε ότι

α) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\gamma^2 - \alpha\beta)$

β) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ άρα $\alpha + \beta = -\gamma$ οπότε

$$(\alpha + \beta)^2 = (-\gamma)^2$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \gamma^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 - 2\alpha\beta \quad (\text{προσθέτουμε και στα δύο μέλη το } \gamma^2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\gamma^2 - 2\alpha\beta \quad \text{άρα } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\gamma^2 - \alpha\beta)$$

β)

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ άρα $\alpha + \beta = -\gamma$ **(1)** οπότε

$$(\alpha + \beta)^3 = (-\gamma)^3$$

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = -\gamma^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha\beta(\alpha + \beta) \quad \text{και λόγω της (1)}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha\beta(-\gamma)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$$

12.

Αν $\alpha + \gamma = 2\beta$, δείξτε ότι $(\alpha - \beta)^2 + 2\beta^2 + (\beta - \gamma)^2 = 2\alpha^2 - 4\beta(\alpha - \beta)$

Προτεινόμενη λύση

Αφού $\alpha + \gamma = 2\beta$, είναι $\gamma = 2\beta - \alpha$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } (\alpha - \beta)^2 + 2\beta^2 + (\beta - \gamma)^2 &= (\alpha - \beta)^2 + 2\beta^2 + (\beta - 2\beta + \alpha)^2 = \\ &= (\alpha - \beta)^2 + 2\beta^2 + (\alpha - \beta)^2 = \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \\ &= 2\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta = \\ &= 2\alpha^2 - 4\beta(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

13.

Αν $x = \frac{\beta}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$ και $y = \frac{\beta}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$, δείξτε ότι $x^2 - y^2 = \beta^2$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 &= \left[\frac{\beta}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^2 - \left[\frac{\beta}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \right]^2 = \\
 &= \frac{\beta^2}{4} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 = \\
 &= \frac{\beta^2}{4} \left(\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{\beta^2}{4} \left(\alpha^2 - 2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) = \\
 &= \alpha^2 \frac{\beta^2}{4} + 2 \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 \frac{\beta^2}{4} + 2 \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{\alpha^2} = \\
 &= 4 \frac{\beta^2}{4} = \beta^2
 \end{aligned}$$

14.

Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, δείξτε ότι $(3\alpha - 4\alpha^3)^2 + (3\beta - 4\beta^3)^2 = 1$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 (3\alpha - 4\alpha^3)^2 + (3\beta - 4\beta^3)^2 &= \\
 &= 9\alpha^2 - 24\alpha^4 + 16\alpha^6 + 9\beta^2 - 24\beta^4 + 16\beta^6 = \\
 &= 9(\alpha^2 + \beta^2) - 24(\alpha^4 + \beta^4) + 16(\alpha^6 + \beta^6) = \\
 &= 9(\alpha^2 + \beta^2) - 24[(\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2] + 16[(\alpha^2)^3 + (\beta^2)^3] \\
 &= 9(\alpha^2 + \beta^2) - 24[(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2] + 16[(\alpha^2 + \beta^2)^3 - 3\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)] \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\
 &= 9 - 24(1 - 2\alpha^2\beta^2) + 16(1 - 3\alpha^2\beta^2) = \\
 &= 9 - 24 + 48\alpha^2\beta^2 + 16 - 48\alpha^2\beta^2 = 1
 \end{aligned}$$

Σχόλιο 3